Université de Bourgogne Mercredi 26 juin 2019
Licence 3 Mathématiques 9h-12h

Examen d'Algèbre 2 Session 2 -

Exercice 1 (Questions de cours) :

1. Soit G un groupe et H et K deux sous groupes de G.
   (a) Montrer que l'ensemble $H.K$ est un sous groupe de G si et seulement si $H.K = K.H$.
   (b) On suppose que H est un sous groupe normal de G. Montrer que $H.K$ est un sous groupe de G.
2. Soient H, Q et G trois groupes.
   (a) Donner la définition d'une suite exacte courte scindée.
   (b) Énoncer le théorème de caractérisation de produit semi-direct par les suites exactes.
3. Soit G un groupe et X un ensemble non vide et $\star : G \times X \to X$ une action de G sur X.
   (a) Soit $x \in X$. Donner la définition de l'orbite $\mathcal{O}(x)$ et du stabilisateur G_x de l'élément x.
   (b) Montrer que si deux éléments x et y ont la même orbite, alors les stabilisateurs G_x et G_y sont conjugués.
   (c) Montrer que si X est fini, alors le cardinal de l'orbite $\mathcal{O}(x)$ est égal à l'indice du stabilisateur $[G : G_x]$.

Exercice 2 : Soient G un groupe, H et K deux sous-groupes normaux de G.

1. Démontrer que le sous-groupe engendré par $H \cup K$ est normal.
2. On suppose que $H \cap K = \{1_G\}$.
   (a) Montrer que $\forall h \in H, \forall k \in K,\ hk = kh$.
   (b) Montrer que HK est un sous-groupe normal de G et que $HK \simeq H \times K$.

Exercice 3 : Soit G un groupe fini non trivial dont l'élément neutre est noté 1_G et tel que pour tous $x, y \in G$ différents de 1_G, il existe un élément g de G tel que $x = gyg^{-1}$.

1. Montrer que si $x, y \in G \setminus \{1_G\}$ alors x et y sont du même ordre.
2. En déduire que G est un p−groupe, où p est un nombre premier.
3. On fait agir G sur lui même par conjugaison : $(g, x) \in G \times G \to gxg^{-1} \in G$.
   (a) Montrer que chaque orbite est soit de cardinal 1 ou une puissance non triviale de p.
   (b) Montrer que G possède deux classes de conjugaison (deux orbites).
   (c) En déduire que G est un groupe d'ordre 2.

Exercice 4 : Soit $\mathbb{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{Z} \right\}$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{A}$ muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau commutatif.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{U}(\mathbb{A})$ des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{A}$.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{Z} \right\}$ est un idéal de l'anneau $\mathbb{A}$
4. Montrer que $\mathcal{I}$ est un idéal premier de $\mathbb{A}$.
5. Montrer que $\mathcal{I}$ n'est pas un idéal maximal de $\mathbb{A}$ (on pourra montrer que $\mathbb{A}/\mathcal{I}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$).

Exercice 5 : Soit G l'ensemble des matrices à coefficients réels de la forme $M(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ muni de la multiplication des matrices.

1. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. (On donnera les résultats $M(x, y, z)M(a, b, c)$ et $M(x, y, z)^{-1}$ en faisant les calculs au brouillon).
2. Donner le centre $Z(G)$ du groupe G.
3. Montrer que le groupe quotient $(G/Z(G), \times)$ est isomorphe au groupe additif $(\mathbb{R}^2, +)$.
4. On considère la suite
   $\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\imath} G \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \{(0, 0)\}$, avec $\imath(z) = M(0, 0, z)$ et $\pi(M(x, y, z)) = (x, y)$.
   (a) Montrer que la suite est exacte et préciser $\mathrm{Im}\, \imath$.
   (b) On veut montrer par l'absurde que la suite n'est pas scindée.
   Supposons la suite précédente scindée. Soient $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow G$ une section et $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que
   $$\forall (x, y) \in R^2,\ s(x, y) = M(x, y, \varphi(x, y)).$$
      i. Montrer que l'image du morphisme s est un sous groupe abélien de G.
      ii. En calculant de deux façons $s(x + x', y + y')$ montrer que l'on aboutit à une contradiction.