L3 Mathématiques

Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2018-2019
Janvier 2019

Algèbre 1
Examen

Question de cours 1.

(1) Donner les définitions de *cycle de longueur* k, où $k \geq 2$, et de *transposition.*

(2) Montrer que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions. On admettra que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les cycles.

(3) Pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ on pose $s_i = (i, i+1)$. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par $\{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$.

Question de cours 2. Soit A un anneau commutatif.

(1) Donner les définitions d'idéal premier et d'idéal maximal de A.

(2) Montrer qu'un idéal I de A est premier si et seulement si A/I est intègre.

(3) Montrer qu'un idéal I de A est maximal si et seulement si A/I est un corps.

(4) Montrer que tout idéal maximal de A est premier.

(5) Soit m un entier ≥ 2. Montrer que $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si m est premier.

Exercice 1. Soit A un anneau commutatif. Pour tout idéal I de A on appelle *radical* de I, noté $\sqrt{I}$, l'ensemble $\sqrt{I} = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ a^n \in I\}$. En particulier, le *nilradical* de A est le radical de l'idéal $(0_A) = \{0_A\}$.

(1) Soit I un idéal de A. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.

(2) Soit I un idéal de A. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

(3) Montrer que le nilradical est inclus dans l'intersection des idéaux premiers.

(4) Soit m un entier ≥ 2. Déterminer le radical de l'idéal $m\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$.

Exercice 2. Soit A l'ensemble des nombres rationnels $x \in \mathbb{Q}$ qui s'écrivent sous la forme $x = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et 3 ne divisant pas q.

(1) Montrer que A est un anneau intègre.

(2) Montrer que tout élément $x \in A$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = 3^k \frac{p}{q}$ où $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\text{pgcd}(p, q) = 1$, et 3 ne divise ni p ni q.

(3) Déterminer les éléments inversibles de A.

(4) Montrer que 3 est irréductible dans A et tout élément irréductible de A est de la forme $3u$ où u est un élément inversible de A.

(5) Déterminer les idéaux de A.