

Exercice I. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

avec α et β réels.

a) Ces matrices sont-elles symétriques ?

b) Calculer les valeurs propres a_i et les vecteurs propres (normés) correspondants $|u_i\rangle$ de la matrice A en précisant le degré de dégénérescence pour chaque valeur propre.

c) Vérifier le théorème de décomposition spectrale :

$$A = \sum_{i=1}^3 a_i |u_i\rangle \langle u_i|. \quad (2)$$

d) Calculer alors e^{iAt} (avec t réel et i le nombre imaginaire $i^2 = -1$) en utilisant le théorème spectral :

$$f(A) = \sum_{i=1}^3 f(a_i) |u_i\rangle \langle u_i|, \quad (3)$$

où $f(\cdot)$ est une fonction.

e) Calculer le commutateur $AB - BA$. Pour quelles valeurs de α et β est-il 0 : $AB - BA = 0$?

On se limitera à cette situation $AB - BA = 0$ par la suite.

f) On définit $|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que le vecteur $|w\rangle = \gamma|v_1\rangle + \delta|v_2\rangle$ est vecteur propre de A pour tout γ et δ .

Pourquoi ?

g) Déterminer les vecteurs qui sont simultanément vecteurs propres de A et B .

Exercice II

a) Résoudre l'équation différentielle réelle (scalaire), où $x \equiv x(t)$ et a une constante réelle :

$$x' - iax = 0. \quad (4)$$

Ecrire la solution pour la condition initiale $x(0) = 1$.

b) Montrer que la solution de l'équation différentielle matricielle

$$\frac{d}{dt}|u(t)\rangle - iA|u(t)\rangle = 0, \quad (5)$$

où A est une matrice, a la même forme que la solution scalaire ci-dessus.

Indication : on vérifiera la solution en la reportant dans l'équation (5).

c) Calculer la solution avec A la matrice de l'équation (1) et la condition initiale $|u(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On utilisera le résultat de l'exercice Id).

Exercice III

On étudie l'équation différentielle de Bessel, avec $y \equiv y(x)$ et n une constante,

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (6)$$

par la méthode de Frobenius via une solution de la forme $y(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} x^{k+\ell}$.

1. Déterminer et résoudre l'équation indicelle en fonction de n .
2. Montrer que la relation de récurrence entre $a_{\ell+2}$ et a_{ℓ} a deux formes possibles :

$$a_{\ell+2} = -\frac{1}{(\ell+2)(\ell+2+2n)}a_{\ell}, \quad a_{\ell+2} = -\frac{1}{(\ell+2)(\ell+2-2n)}a_{\ell}. \quad (7)$$

On s'intéresse par la suite au cas $n=0$.

3. Montrer que la relation de récurrence entre $a_{\ell+2}$ et a_{ℓ} prend alors une forme unique.
En déduire que la solution s'écrit par le développement en série (à une constante multiplicative près) :

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}. \quad (8)$$

On l'appelle *fonction de Bessel d'ordre 0*, notée $J_0(x)$.

4. Vérifier la convergence de la série.