L3 Maths

Université de Bourgogne, Mathématiques

Année universitaire 2017–2018

Géométrie des courbes et des surfaces (LMo6G1)

Examen final

— durée : 3 heures —

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés.

La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

Information : *l'Exercice 5, parce qu'il est plus abstrait que les autres, pourra sembler plus difficile.*

Exercice 1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée. On suppose que α est birégulière.

(1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Rappeler la *définition* du repère de Frenet $\big(\mathrm{T}(t), \mathrm{N}(t), \mathrm{B}(t)\big)$ de α au point $\alpha(t)$.

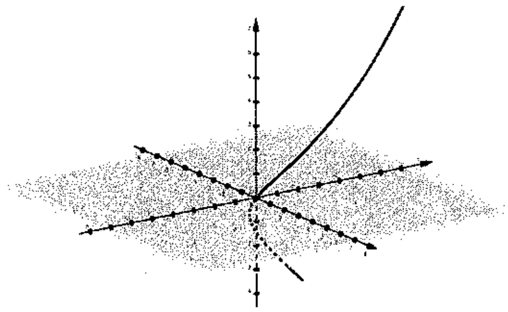
(2) Soit $t \in \mathbb{R}$. Rappeler les *définitions* de la courbure $\kappa(t)$ et de la torsion $\tau(t)$ de α au point $\alpha(t)$.

(3) Après avoir rappelé leur énoncé, démontrer les trois équations de Frenet (celles qui relient les dérivées $\mathrm{T}', \mathrm{N}', \mathrm{B}'$ à $\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B}$ et κ, τ).

Exercice 2. Soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la courbe paramétrée qui est définie par

$$\alpha(t) := \big(3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3\big)$$

et est dessinée ci-dessous dans un voisinage de $\alpha(0) = (0, 0, 0)$:



(1) Montrer que α est régulière et calculer sa courbure.

(2) Montrer que α est birégulière et calculer sa torsion.

(3) Montrer que α est une hélice, dont on précisera l'angle et la direction.

Exercice 3. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la quadrique d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

(1) Montrer que S est une surface régulière, dont on rappellera le nom. Faire un croquis de S.

(2) Soit la nappe paramétrée $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(u, v) := \big(\sqrt{2}v\cos(u) + \sqrt{2}(v-1)\sin(u), \sqrt{2}v\sin(u) + \sqrt{2}(1-v)\cos(u), 2v - 1\big).$$

Montrer que S est le support de φ, c'est-à-dire que $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$.

(3) Déduire de la question (2) que S est une surface réglée.

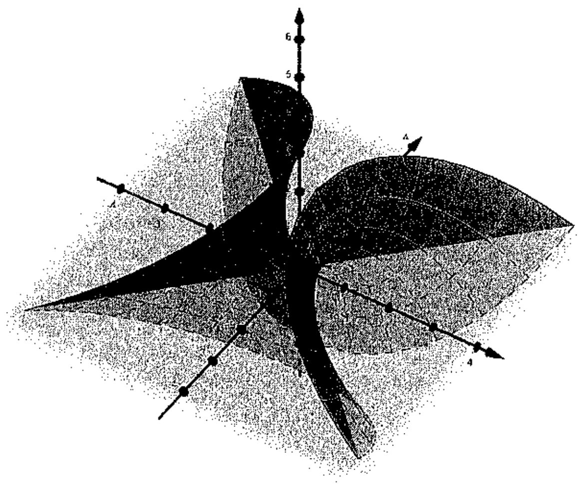
(4) Montrer que la nappe paramétrée φ est régulière.

(5) Expliquer brièvement pourquoi la surface S est orientable, puis proposer *sans justification* un atlas orientable pour S.

Exercice 4. La *surface d'Enneper* est le support S de la nappe paramétrée $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(u,v) := \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right);$$

elle est dessinée ci-dessous dans un voisinage de $\varphi(0,0) = (0,0,0)$:



Pour un point $(r,s) \in \mathbb{R}^2$ fixé, on note $p := \varphi(r,s) \in S$ et

$$f := \frac{\partial \varphi}{\partial u}(r,s), \qquad g := \frac{\partial \varphi}{\partial v}(r,s).$$

(1) Montrer que la norme euclidienne $\|f \wedge g\|$ du vecteur $f \wedge g$ vaut $(1 + r^2 + s^2)^2$ et en déduire que la nappe paramétrée φ est régulière.

(2) Calculer la matrice de la première forme fondamentale I_p de S dans la base (f,g) de $\overrightarrow{T_pS}$.

(3) Calculer la matrice de la seconde forme fondamentale II_p de S dans la base (f,g) de $\overrightarrow{T_pS}$.

(4) Calculer la courbure de Gauss K_p de S en p.

(5) On suppose ici que $(r,s) = (0,0)$ de sorte que $p = (0,0,0)$. Déterminer le plan tangent affine T_pS et sa position relative avec S dans un voisinage de p.

Exercice 5. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière, soit $p \in S$ et soit $\eta : U \to \mathbb{S}^2$ une application de Gauss définie sur un voisinage U de p. Soient $\varepsilon > 0$ et

$$\alpha :]-\varepsilon, +\varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

une courbe paramétrée régulière. On suppose que $\alpha(]-\varepsilon,+\varepsilon[) \subset S$ et que $\alpha(0) = p$.

(1) Montrer que

$$\langle \alpha''(0), \eta(p) \rangle = II_p(\alpha'(0))$$

où $\langle -, - \rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ et II_p est la seconde forme fondamentale de S en p.

(2) Soit P un plan affine de $\mathbb{R}^3$ contenant p et tel que $\eta(p) \in \overrightarrow{P}$: i.e., P contient la droite normale à S en p. Faire un croquis illustrant cette situation, puis montrer qu'il existe un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$ et une courbe paramétrée régulière $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ passant par p et telle que $\beta(J) \subset P \cap S$.

(3) On suppose désormais que la courbe α est du type donné par la question (2) — c'est-à-dire que $\alpha(]-\varepsilon,+\varepsilon[) \subset P \cap S$ — et on demande que α soit paramétrée par longueur d'arc. Soit $\Phi : P \to \mathbb{R}^2$ une transformation affine orthogonale (P héritant du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$, et $\mathbb{R}^2$ étant muni de son produit scalaire usuel). On obtient donc une courbe plane

$$\tilde{\alpha} := \Phi \circ \alpha :]-\varepsilon, +\varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Exprimer la courbure de $\tilde{\alpha}$ au point $\tilde{\alpha}(0)$ en fonction de la seconde forme fondamentale II_p de S.