L3 maths

2017/18

Analyse Numérique (LM64)

Examen final (10 janvier 2018)

Temps : 3h00

1. (Décomposition QR) **[4.5 points]**

   i) Énoncer le théorème de décomposition QR d'une matrice. **[1 point]**

   ii) Étant donnée une matrice A inversible, montrer que sa décomposition QR est unique. **[1.5 points]**

   iii) Étant donnée la matrice A

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

   écrire sa décomposition QR. **[2 points]**

2. (Valeurs propres) **[6 points]**

   i) Énoncer et montrer le théorème des cercles de Gershgorine. **[3 points]**

   ii) Étant donnée la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & 3 & \gamma & \delta & \alpha \\ \gamma & \delta & 7 & \alpha & \beta \\ \delta & \alpha & \beta & 9 & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 10 \end{pmatrix},$$

   formuler une condition suffisante sur α, β, γ et δ garantissant que les valeurs propres de A sont toutes distinctes. **[2 points]**

   iii) Formuler une condition suffisante sur α, β, γ et δ garantissant que la matrice A est symétrique définie positive. **[1 point]**

3. (Méthodes itératives) **[7.5 points]**

   Soient A et $P \in M_n(\mathbb{R})$ matrices inversibles. Soit la suite définie par

$$\begin{cases} x^{(0)} = x_0 \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \end{cases}$$

   avec $B = I_n - P^{-1}A$ et $c = P^{-1}b$.

   i) Énoncer la condition nécessaire et suffisante, en termes du rayon spectral $\rho(B)$, pour la convergence $x^{(k)} \to A^{-1}b$. **[1 point]**

   ii) On considère la matrice, avec $a \in \mathbb{R}$ arbitraire

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

   a) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles chacune des méthodes suivantes converge : Richardson **[3 point]**, Jacobi **[1.5 point]** et Gauss-Seidel **[1.5 point]**.

   b) Dans l'ensemble de valeurs de a pour lesquelles les trois méthodes convergent, quel est le classement de ces méthodes en fonction de leur vitesse de convergence respective ? **[0.5 points]**

4. (Méthode de la puissance) [**2 points**]
Appliquer le théorème de la convergence de la méthode de la puissance à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

et à l'initialisation $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.