Analyse – Math31

Temps disponible : 2 heures

Exercice 1. Soit f une fonction de variable réelle, continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

(a) Donner la définition de f uniformément continue sur I.

(b) Donner la définition de recouvrement de I par intervalles ouverts, puis énoncer le théorème de Borel-Lebesgue lorsque I est compact.

(c) Montrer que f est uniformément continue sur I si I est compact.

Soit g une fonction réelle, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que g est une *fonction de Lipschitz* sur I s'il existe une constante k telle que, pour tout $x, y \in I$, on ait :

$$|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|.$$

On dit aussi que g est k-lipschitzienne. On note dans la suite $J = [0, +\infty[$.

(d) Montrer qu'un fonction de Lipschitz sur I est uniformément continue sur I.

(e) Soit $f(x) = 1/(1 + |x|)$. Montrer que f est 1-lipschitzienne sur J puis sur $\mathbb{R}$.

(f) Soit $f(x) = x^2$ définie sur J. Montrer que f n'est pas uniformément continue.

(g) Montrer que $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue mais pas de Lipschitz sur J.

Exercice 2. Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{(2n)!} z^n; \qquad \sum_{n\geq 1} \ln(n) z^n;$$

$$\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \sin\frac{1}{n}\right) z^n; \qquad \sum_{n\geq 0} \tan\left(\frac{n\pi}{7}\right) z^n.$$

Exercice 3. Développer en série les fonctions suivantes autour de l'origine, en spécifiant l'ensemble de convergence du développement. Ici z désigne une variable complexe et x une variable réelle. On rappelle aussi $\cos(z) = 1/2(e^{iz} + e^{-iz})$ et $\cosh(z) = 1/2(e^z + e^z)$.

$$\frac{1}{2z^2 - 3z + 1}; \qquad \ln(x^2 - 5x + 6); \qquad \cos(z)\cosh(z).$$

Exercice 4. Considérons la série entière $\sum_{n\geq 0} n^2 z^n$ et notons f sa fonction somme.

(1) Déterminer le rayon de convergence de cette série.

(2) Soit $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^{n-1}$. Donner le développement en série entière en 0 de la primitive G de g satisfaisant à $G(0) = 0$. Que peut-on dire de son rayon de convergence ?

(3) Soit $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1}$. Donner le développement en série entière en 0 de la primitive H de h satisfaisant à $H(0) = 0$. En déduire $H(z) = z/(1 - z)$.

(4) Démontrer que, dans un voisinage de 0 que vous déterminerez, on a :

$$f(z) = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.$$

Exercice 5. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. Notons :

$$I_n(f) = \int_a^b f(x) e^{inx} dx.$$

(1) Justifier que $I_n(f)$ est bien défini.

(2) On considère, pour $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, la fonction indicatrice $f = \chi_{[\alpha,\beta]}$, qui vaut 1 sur $[\alpha, \beta]$ et 0 ailleurs. Montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n(f) = 0$.

(3) Soit f en escalier sur $[a, b]$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n(f) = 0$.

(4) Montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n(f) = 0$, quelque soit f Riemann-intégrable.

L2.