Université de Bourgogne
Année universitaire : 2013/2014

L3 ESI

Examen d'Automatique/Robotique

Durée : 2H.
Documents autorisés.

Exercice 1

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 \end{cases} \qquad (1)$$

1) Démontrer que le triplet $(x_1^*, x_2^*, u^*) = (0, -1, 1)$ correspondant à un point de fonctionnement.
2) Démontrer que la linéarisation du système (1) autour du point de fonctionnement (0, -1, 1) donne le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta u \qquad (2)$$

Nous pouvons écrire le nouveau système linéarisé sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U \qquad (3)$$

Où $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ est le nouveau vecteur de variables d'état et U est la nouvelle commande.

3) Analyser la stabilité du système (3) en calculant ses valeurs propres.
4) Analyser la stabilité du système avec la fonction de Lyapunov, on prendra $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
5) Trouver le gain $K = [k_1 \quad k_2]$ de la commande $u=-KX$ qui stabilise le système (3). Les pôles désirés du système stabilisé sont (-2, -1).

Concernant la sortie (mesure) du système, nous avons 2 cas : a) $Y = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_1$

b) $Y = X_2$

6) Analyser l'observabilité du système dans les deux cas.
7) concevoir un observateur de Luenberger pour le cas (a). Les pôles désirés de l'observateur sont (-2, -1). Le choix de ces pôles par rapport à la commande précédente est-il judicieux ? Justifier.

Exercice 2

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + u \\ y = 2x \end{cases} \qquad (4)$$

1) Trouver le gain K de la commande « optimale » $u=-Kx$ qui stabilise le système (4) en minimisant le critère quadratique suivant :

$$J = \int_0^\infty \left(\frac{1}{4} y^2 + \frac{1}{2} u^2 \right) dt$$