

DISQUE ET CERCEAU

(Aucun document autorisé - Calculatrice non autorisée)

On considère deux systèmes mécaniques rigides S_1 et S_2 en mouvement dans l'espace rapporté au repère orthonormé et galiléen $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On suppose l'existence d'un champ de pesanteur défini par : $\vec{g} = -g \vec{y}$.

Le système rigide S_1 est un demi cerceau homogène de rayon r_1 dont $R_1 = (O_1, \vec{I}_1, \vec{J}_1, \vec{K}_1)$ définit le repère lié orthonormé. Le point géométrique O_1 pris comme appartenant au prolongement de S_1 est situé au milieu du diamètre. Le vecteur \vec{I}_1 indique une direction du diamètre et avec le vecteur \vec{J}_1 qui lui est orthogonal et pointant vers l'extérieur du demi-cerceau, il définit une base du plan de S_1 . Le vecteur \vec{K}_1 est donc perpendiculaire à ce plan. La masse de S_1 est notée m_1 , la fonction de répartition de masse étant ρ_s . Enfin, on note G_1 son centre de masse. On donne :

$$\overrightarrow{O_1 G_1} = -\frac{2r_1}{\pi} \vec{J}_1$$

On donne également sa matrice d'inertie en G_1 , dans son repère lié :

$$[J_{G_1}(S_1)]^{R_1} = m_1 \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}$$

Le système rigide S_2 est un disque homogène de rayon r_2 ($r_1 > r_2$) dont $R_2 = (O_2, \vec{I}_2, \vec{J}_2, \vec{K}_2)$ définit le repère lié orthonormé. Le point géométrique O_2 définit le centre de masse de S_2 et les vecteurs (\vec{I}_2, \vec{J}_2) forment une base du plan de S_2 . Le vecteur \vec{K}_2 est donc perpendiculaire à ce plan. La masse de S_2 est notée m_2 , la fonction de répartition de masse étant ρ_s . On donne sa matrice d'inertie en O_2 , dans son repère lié :

$$[J_{O_2}(S_2)]^{R_2} = m_2 \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

Le demi-cerceau est posé sur le plan horizontal (\vec{x}, \vec{z}) de telle sorte que son plan soit contenu dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) , sa concavité étant tournée vers le vecteur \vec{y} . Le point de contact géométrique entre (\vec{x}, \vec{z}) et S_1 est noté M . On suppose qu'au cours du mouvement :

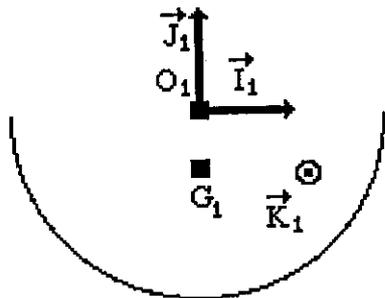
- le plan de S_1 reste dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) ;

- le contact entre (\vec{x}, \vec{z}) et S_1 se produit avec roulement sans glissement.

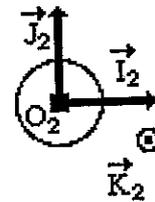
A tout instant donc, le vecteur \vec{K}_1 est confondu avec le vecteur \vec{z} . On définit l'angle φ_1 par : $\varphi_1 = (x, \vec{I}_1)$. La position du point M est repérée par la variable x telle que : $\vec{OM} = x \vec{x}$.

Le disque S_2 est placé à l'intérieur et au contact de S_1 de telle sorte que les plans des deux systèmes soient confondus tout au long du mouvement. A tout instant donc, le vecteur \vec{K}_2 est confondu avec le vecteur \vec{z} . On définit l'angle φ_2 par : $\varphi_2 = (x, \vec{I}_2)$. Le point de contact géométrique entre S_1 et S_2 est noté N. On suppose que ce contact se produit avec roulement sans glissement. On définit le vecteur \vec{i} par $\vec{O}_1\vec{O}_2 = (r_1 - r_2) \vec{i}$, le repère orthonormé R' par $R' = (O_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{z})$ et enfin l'angle φ par $\varphi = (\vec{i}, \vec{x})$.

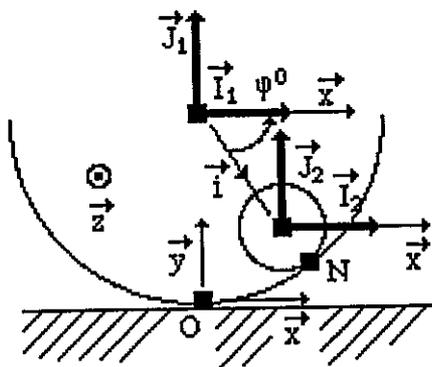
Le disque S_2 est abandonné, à l'instant initial $t_0 = 0$, sans vitesse sur S_1 à partir de la position définie par les angles $\varphi_2(t_0) = 0$ et $\varphi(t_0) = \varphi_0$. A ce même instant, S_1 est immobile et dans la position définie par l'angle $\varphi_1(t_0) = 0$ et par $x(t_0) = 0$.



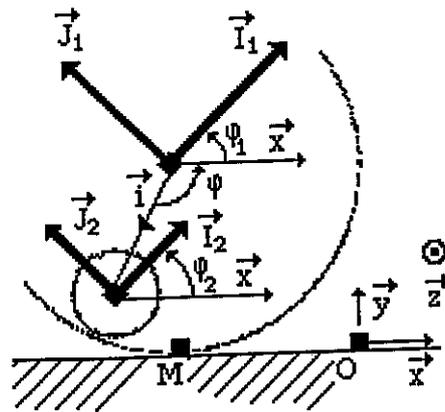
Le système S_1 dans son repère lié



Le système S_2 dans son repère lié



Instant initial



Instant t

Le mécanisme en mouvement

1. CINÉMATIQUE (le repère R est utilisé comme repère de projection)

- 1.1. Donner l'expression des éléments de réduction en M_1 (point matériel de S_1 au lieu du contact entre le plan et S_1) du torseur cinématique de S_1 par rapport à R .
- 1.2. En déduire l'expression des éléments de réduction en O_1 et G_1 du torseur cinématique de S_1 par rapport à R , ainsi qu'en N_1 (point matériel de S_1 au lieu du contact entre S_1 et S_2).
- 1.3. Donner l'expression de l'accélération par rapport à R du point G_1 .
- 1.4. Donner l'expression des éléments de réduction en N_2 (point matériel de S_2 au lieu du contact entre S_1 et S_2) du torseur cinématique de S_2 par rapport à R .
- 1.5. En déduire l'expression des éléments de réduction en O_2 du torseur cinématique de S_2 par rapport à R .
- 1.6. Donner l'expression de l'accélération par rapport à R du point O_2 .

2. CINÉTIQUE (le repère R est utilisé comme repère de projection)

- 2.1. Donner l'expression des éléments de réduction en G_1 du torseur cinétique de S_1 par rapport à R .
- 2.2. Donner l'expression des éléments de réduction en O_1 du torseur dynamique de S_1 par rapport à R .
- 2.3. Donner l'expression des éléments de réduction en O_2 du torseur cinétique de S_2 par rapport à R .
- 2.4. Donner l'expression des éléments de réduction en O_1 du torseur dynamique de S_2 par rapport à R .

3. DYNAMIQUE (le repère R est utilisé comme repère de projection)

- 3.1. Donner la forme et quand c'est possible, l'expression précise des éléments de réduction des actions agissant sur S_1 .
- 3.2. Donner la forme et quand c'est possible, l'expression précise des éléments de réduction des actions agissant sur S_2 .
- 3.3. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à S_1 en O_1 (on écrira l'ensemble des équations scalaires qu'il induit).
- 3.4. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à S_2 en O_1 (on écrira l'ensemble des équations scalaires qu'il induit).
- 3.5. En supposant que les équations du mouvement sont résolues, c'est-à-dire que les fonctions $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ sont connues, montrer que l'on peut donner l'expression des éléments de réduction de tous les torseurs des actions mécaniques agissant sur S_1 et agissant sur S_2 .