Numéro d'anonymat:

Université de Bourgogne **2015-2016** **Analyse** - Math41

durée de l'examen: 2h

- *La calculatrice et les notes de cours ne sont pas autorisées.*

Exercice 1. (Suite de fonctions)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f_n la fonction définie sur $[0, \infty[$ par $f_n(x) = (1 + x^n)^{1/n}$.

1. Etudier la convergence uniforme sur $[0, \infty[$ de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$.
2. Montrer que la suite $\left(\int_0^2 f_n(x)\,dx\right)_{n\geq 1}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 2. (Série de fonctions)
Soit la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

1. Montrer qu'elle est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Notons f sa somme.
2. La fonction f est-elle continue ?
3. On admet que pour tout réel x : $f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{3} - x^2\right)$. En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3. (Espace vectoriel normé)
Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = \max\{|x|, |y|, |x - y|\}$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner la boule unité associée.

Exercice 4. (Espace vectoriel normé)
Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues ~~qui s'annulent~~ en 0. On définit pour $f \in E$,

$$N_1(f) = \int_0^1 x|f(x)|dx$$

$$N_2(f) = \left(\int_0^1 x|f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

1. Vérifier que N_1 et N_2 définissent des normes sur E.
2. Montrer que pour tout $f \in E$, $N_1(f) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} N_2(f)$ (c'est-à-dire que N_2 domine N_1).
3. Montrer qu'en revanche N_1 ne domine pas N_2, et donc que ces deux normes ne sont pas équivalentes (Considérer f_n définie par $f_n(x) = n - n^2 x$ si $x \in [0, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in [1/n, 1]$).

Numéro d'anonymat:

Exercice 5. (Fonctions à plusieurs variables)

1. On considère l'application suivante définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-1)\}$:
$$f(x,y) = \frac{x^3 + (y+1)^3}{x^2 + (y+1)^2}.$$
La fonction f est-elle prolongeable par continuité au point $(0,-1)$? Justifier la réponse.

2. Décrire le domaine de définition, calculer les dérivées partielles et écrire la différentielle de la fonction suivante
$$g(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} \ln(2x+y).$$