

Examen de rattrapage

15 juin 2016 ; durée : 2 h

Ex 1. Questions de cours. Soit E un espace euclidien.

- Donner la définition d'un opérateur **orthogonal**,
- Montrer que pour tout opérateur orthogonal $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^t$,
- Montrer que $\det \mathcal{U} = \pm 1$.

Ex 2. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Trouver la matrice de la rotation d'angle $\pi/3$ autour du vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ex 3. Calculer le gradient et le laplacien de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ suivante

$$f(x) = \|(x \wedge a)\|^2 \|(x \wedge b)\|^2,$$

où $a, b \in \mathbb{R}^3$.

Ex 4. Déterminer les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivante

$$f(x, y) = x^3 - 8y^2 + 4xy - 2x,$$

et préciser pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point selle

Ex 5. Calculer l'intégrale

$$\int \int_D xy \, dx dy,$$

où D est la partie bornée du plan délimitée par les droites d'équation :

$$y = 2; \quad 4y = x; \quad y = 4x.$$

Ex 6. Le contour C est définie par

$$x_1(\theta) = \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad x_2(\theta) = \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

- Montrer que c'est un contour fermé, simple
- Déterminer l'orientation du contour
- Calculer l'air à l'intérieur de ce contour