

1) Dessiner le portrait de phase et donner une classification de tous les types d'orbites possibles pour les systèmes décrits par les Hamiltoniens suivants :

(a) $H = p^2/(2m) - x^2 - x^4$.

(b) $H = p^2/(2m) - x^2 + x^6$.

(c) $H = p^2/(2m) + \frac{1}{x^2+1}$.

d) Définir les concepts suivants : (i) point d'équilibre stable, (ii) point d'équilibre instable, (iii) séparatrice.

2) L'énergie cinétique et l'énergie potentielle d'un pendule de masse m et longueur l sont données par

$$E_{cin} = \frac{1}{2}ml^2v^2, \quad E_{pot} = -mgl \cos(\theta),$$

où θ est l'angle par rapport à la verticale, $v = \frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire, et $g = 9.81ms^{-2}$.

a) Ecrire l'équation du mouvement de Newton pour θ .

b) Ecrire le Lagrangien pour ce système, et montrer que les équations d'Euler-Lagrange correspondantes sont équivalentes aux équations de Newton.

c) Quel est le moment canoniquement conjugué à θ ?

d) Déterminer l'Hamiltonien correspondant à ce système et écrire les équations de Hamilton.

e) Montrer que l'énergie totale est conservée.

3) Répondre aux questions suivantes :

a) Ecrire la transformation de Lorentz entre deux référentiels R et R' avec vitesse relative constante v en direction x .

b) Définir les notions d'intervalle d'espace temps (i) de type espace, (ii) de type temps. (iii) Définir le cône de lumière.

c) Comment définit-on l'impulsion relativiste? Quelle est sa relation avec la vitesse propre?

d) Expliquer pourquoi la quatrième composante du quadri-vecteur impulsion-énergie s'interprète comme une énergie (divisée par c).

4) Une fusée A lancée à l'instant $t = t' = 0$ se déplace à une vitesse uniforme v_A (t est le temps mesuré avec une horloge H_{terre} qui reste sur terre, et t' celui mesuré dans la fusée). Après un intervalle T (mesuré par H_{terre}) on lance une deuxième fusée B qui se déplace avec vitesse uniforme v_B dans la même direction que la première. Si $v_B > v_A$, la fusée B rattrape la fusée A à un instant τ .

a) Déterminer τ mesuré par l'horloge H_{terre} .

b) Quel est l'instant de départ de la fusée B mesuré par l'horloge H_A qui est dans la fusée A ?

c) Quel est l'instant de la rencontre des deux fusées, mesuré par H_A ?

d) Par rapport au référentiel de la fusée A , à quelle distance de la terre se trouvait-elle à l'instant du lancement de B ?

e) Calculer la vitesse de la fusée B , mesurée dans le référentiel de A .