
Math32 : Contrôle terminalDécembre 2015 - Durée 2h00

Questions de cours. (5 points)

Énoncer et démontrer le lemme des noyaux.

Exercice 1. (5 points)

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 5 & -6 \\ -2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer A^2 .
2. En déduire que A annule un polynôme de degré 2 que l'on précisera.
3. Démontrer que A se diagonalise sur \mathbb{R} .
4. Donner le spectre de A (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A).
5. Donner une base de chaque espace propre.

Exercice 2. (5 points)

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A et le factoriser.
2. Calculer le polynôme minimal de A et en déduire si A est diagonalisable ou non.
3. Calculer en fonction de A les projecteurs spectraux associés à chacune des valeurs propres de A .
4. Calculer A^n pour tout entier n .